



# Éléments finis pour le calcul à la rupture des structures de coque

Jeremy Bleier, P de Buhan

## ► To cite this version:

Jeremy Bleier, P de Buhan. Éléments finis pour le calcul à la rupture des structures de coque. CSMA 2015, 12e Colloque National en Calcul des Structures, May 2015, Giens, France. hal-01165976

**HAL Id: hal-01165976**

**<https://hal.science/hal-01165976>**

Submitted on 21 Jun 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Éléments finis pour le calcul à la rupture des structures de coque

J. Bleyer<sup>1</sup>, P. de Buhan<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Université Paris-Est, Laboratoire Navier (ENPC-IFSTTAR-CNRS UMR 8205), {jeremy.bleyer,patrick.debuhan}@enpc.fr

**Résumé** — Les approches statique et cinématique du calcul à la rupture dans le cadre d'une modélisation de type *coque* sont mises en œuvre numériquement par la méthode des éléments finis. La formulation statique en efforts généralisés ou cinématique en vitesse virtuelle reposent sur la superposition d'un élément de membrane et d'un élément de plaque en flexion. L'écriture du critère de résistance généralisé par intégration du critère local dans l'épaisseur permet de formuler les problèmes d'optimisation dans le cadre de la programmation conique pour laquelle existent des solveurs performants tels que MOSEK.

**Mots clés** — calcul à la rupture, analyse limite, éléments finis, coque, programmation conique.

## 1 Introduction

La théorie du calcul à la rupture (ou analyse limite dans le cas d'un comportement élastique-parfaitement plastique) permet de déterminer directement la charge ultime potentiellement supportable par une structure en considérant uniquement la compatibilité de l'équilibre et du critère de résistance à vérifier en tout point de celle-ci [1]. Les approches statique par l'intérieur et cinématique par l'extérieur permettent d'encadrer cette charge ultime par une borne inférieure et supérieure respectivement.

Le développement récent de solveurs d'optimisation convexe efficaces [2] a permis de faire de nombreux progrès dans la mise en œuvre numérique de ces approches dans le cas où le critère de résistance peut s'écrire à l'aide de contraintes linéaires ou coniques du second-ordre. Après le développement d'éléments finis dédiés aux plaques en flexion [3], nous proposons ici de combiner ces derniers à des éléments de membrane pour traiter le cas de structures de coque.

## 2 Approche statique

### 2.1 Formulation générale

Nous adoptons un point de vue en termes de milieu continu généralisé pour lequel les efforts intérieurs du modèle de coque sont décrits par le tenseur des efforts membranaires  $\underline{N}$ , le tenseur des moments de flexion  $\underline{M}$  et le vecteur des efforts tranchants  $\underline{V}$ , tandis que le critère de résistance en un point, noté  $\mathcal{G} = \{(\underline{N}, \underline{M}) \text{ tels que } f(\underline{N}, \underline{M}) \leq 0\}$ , est supposé ne faire intervenir que l'effort membranaire et le moment de flexion. On suppose donc une résistance infinie vis-à-vis de l'effort tranchant (hypothèse de coque mince). Un chargement  $\underline{Q}$  est potentiellement supportable au sens du calcul à la rupture si [1] :

$$\exists(\underline{N}(\underline{x}), \underline{M}(\underline{x}), \underline{V}(\underline{x})) \text{ statiquement admissibles avec } \underline{Q} \text{ et } (\underline{N}(\underline{x}), \underline{M}(\underline{x})) \in \mathcal{G} \quad \forall \underline{x} \in \Omega$$

### 2.2 Discrétisation par éléments finis

La coque  $\Omega$  est discrétisée en facettes triangulaires dans lesquelles on considère une interpolation linéaire de l'effort membranaire et quadratique pour le moment de flexion, les champs étant *a priori* discontinus d'un élément à l'autre.

L'écriture de l'équilibre local à l'intérieur de chaque facette, des conditions de continuité en efforts et moment entre deux facettes adjacentes et des conditions aux limites, conduisent à une relation matricielle de la forme  $\mathbf{H}\Sigma + \mathbf{F} = \mathbf{0}$  où  $\Sigma = \{N_{ij}^e, M_{ij}^e, V_i^e\}^T$  est le vecteur généralisé des inconnues statiques et  $\mathbf{F}$  le vecteur des efforts extérieurs. La relation précédente définit ainsi un sous-espace affine des champs  $\underline{N}, \underline{M}, \underline{V}$  statiquement admissibles.

## 2.3 Écriture du critère de résistance

Pour une coque homogène dans son plan et d'épaisseur  $h$ , le critère de résistance généralisé  $\mathcal{G}$  peut s'obtenir à partir du critère de résistance local  $\mathcal{C}$  dans l'épaisseur  $z$  pour des états de contrainte plane :

$$\begin{aligned} (\underline{N}, \underline{M}) \in \mathcal{G} &\Leftrightarrow \exists \underline{\sigma}(z) \text{ avec } \sigma_{iz} = 0, \quad i = 1, 2, 3 \\ &\underline{\sigma}(z) \in \mathcal{C}(z) \quad z \in [-h/2; h/2] \\ &\underline{N} = \int_{-h/2}^{h/2} \underline{\sigma}(z) dz \text{ et } \underline{M} = \int_{-h/2}^{h/2} -z \underline{\sigma}(z) dz \end{aligned}$$

En pratique, l'épaisseur est discrétisée implicitement en  $n$  couches ce qui permet d'approximer le critère généralisé par l'intérieur :  $\mathcal{G}_{int}^n \subset \mathcal{G}$ .

## 2.4 Optimisation

En considérant un chargement de la forme  $\mathbf{F} = \lambda \mathbf{F}_0$  où  $\mathbf{F}_0$  est un chargement de référence, la valeur ultime  $\lambda^+$  du multiplicateur  $\lambda$  est alors minorée pour une discrétisation donnée par la solution du problème d'optimisation convexe suivant :

$$\begin{aligned} \lambda^+ \geq \lambda_{inf} = \max_{\Sigma} \quad &\lambda \\ \text{t.q.} \quad &\mathbf{H}\Sigma + \lambda \mathbf{F}_0 = \mathbf{0} \\ &(\underline{N}^e, \underline{M}^e) \in \mathcal{G}_{int}^n \quad \forall e \end{aligned}$$

où  $\mathcal{G}_{int}^n$  est exprimé à partir du critère local en un certain nombre de points  $\mathcal{C}(z_i)$ . Dans le cas où  $\mathcal{C}$  est un critère classique en contraintes planes tels que von Mises, Coulomb, Johansen, etc., alors le problème final peut s'exprimer à l'aide de contraintes coniques du second-ordre et être résolu grâce à des solveurs dédiés.

# 3 Approche cinématique

## 3.1 Formulation générale

La cinématique virtuelle de la coque est définie par un champ de vitesse virtuelle  $\underline{u}$  et un champ de vitesse de rotation  $\underline{\theta}$  appartenant au plan tangent de la coque. L'hypothèse de résistance infinie à l'effort tranchant impose de considérer une cinématique de Love-Kirchhoff dans laquelle la vitesse de rotation est reliée au gradient du champ de vitesse normale [3].

À l'aide du principe des puissances virtuelles, l'approche cinématique du calcul à la rupture revient à écrire pour un chargement  $\underline{Q}$  potentiellement supportable :

$$\forall (\underline{u}, \underline{\theta}) \text{ cinématiquement admissibles } P_{ext}(\underline{u}, \underline{\theta}) \leq P_{rm}(\underline{u}, \underline{\theta}) = \int_{\Omega} \pi(\underline{\delta}, \underline{\chi}) d\Omega$$

où  $\underline{\delta}$  est le tenseur des déformations membranaires,  $\underline{\chi}$  le tenseur de courbure associés au champ de vitesse virtuelle et  $\pi(\underline{\delta}, \underline{\chi}) = \sup_{(\underline{N}, \underline{M}) \in \mathcal{G}} \{ \underline{N} : \underline{\delta} + \underline{M} : \underline{\chi} \}$  est la fonction d'appui du critère de résistance.

Dans le cas où les champs de vitesse virtuels admettent des discontinuités à travers une ligne de discontinuité, l'expression de la puissance résistante maximale doit être complétée par la contribution de ces discontinuités.

## 3.2 Discrétisation

On considère une interpolation quadratique du champ de vitesse  $\underline{u}$  et une interpolation linéaire du champ de rotation  $\underline{\theta}$  dans chaque élément. Les champs sont *a priori* discontinus et la contribution des discontinuités est prise en compte dans le calcul de la puissance résistante maximale. Les relations de compatibilité vitesse-déformation s'écrivent sous la forme :  $\underline{\delta} = \{ \delta_{ij}^e \} = \mathbf{B}_{\delta} \mathbf{U}$  et  $\underline{\chi} = \{ \chi_{ij}^e \} = \mathbf{B}_{\chi} \mathbf{U}$  où  $\mathbf{U}$  collecte toutes les inconnues cinématiques. La puissance des efforts extérieurs s'écrit alors  $P_{ext} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{U}$ . Enfin, la puissance résistante maximale est approximée à l'aide d'une formule d'intégration numérique sur chaque triangle et chaque arête du maillage.

### 3.3 Calcul des fonctions d'appui

D'après la description retenue du critère de résistance généralisé, la fonction d'appui  $\pi(\underline{\underline{\delta}}, \underline{\underline{\chi}})$  de ce dernier s'obtient en intégrant la fonction d'appui  $\Pi(\underline{\underline{d}}; z) = \sup_{\underline{\underline{\sigma}} \in C(z)} \{\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}}\}$  du critère de résistance local en contraintes planes pour un taux de déformation de la forme  $\underline{\underline{d}} = \underline{\underline{\delta}} - z\underline{\underline{\chi}}$ , soit :

$$\pi(\underline{\underline{\delta}}, \underline{\underline{\chi}}) = \int_{-h/2}^{h/2} \Pi(\underline{\underline{\delta}} - z\underline{\underline{\chi}}; z) dz$$

Le calcul exact étant impossible, on approxime cette expression par excès par une formule des trapèzes à  $n$  points, conduisant donc à une majoration de l'expression de la puissance résistante maximale et donc de la charge ultime.

### 3.4 Optimisation

Toujours en considérant un chargement de la forme  $\mathbf{F} = \lambda \mathbf{F}_0$ , la valeur ultime  $\lambda^+$  est alors majorée par la solution du problème d'optimisation convexe suivant :

$$\begin{aligned} \lambda^+ \leq \lambda_{sup} = \min_{\mathbf{U}} \quad & \sum_e \sum_{i=1}^n \omega_{e,i} \Pi(\mathbf{d}_i; z_i) \\ \text{t.q.} \quad & \mathbf{F}_0^T \cdot \mathbf{U} = 1 \\ & \mathbf{d}_i = \underline{\underline{\delta}} - z_i \underline{\underline{\chi}} = (\mathbf{B}_\delta - z_i \mathbf{B}_\chi) \mathbf{U} \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

où les  $\omega_{e,i}$  sont des poids d'intégration,  $z_i$  les points d'intégration dans l'épaisseur (le terme de discontinuité n'a pas été écrit ici dans un souci de concision).

À nouveau, si  $C$  est un critère classique en contraintes planes, sa fonction d'appui  $\Pi$  peut se réexprimer à l'aide de contraintes coniques du second-ordre et le problème peut être résolu efficacement.

## 4 Exemples numériques

### 4.1 Coque cylindrique bi-encastée

Dans cet exemple, on cherche à déterminer la charge ultime d'une coque cylindrique circulaire de rayon  $R$ , de longueur  $2L$ , encastée à ses deux extrémités, obéissant à un critère local de von Mises de résistance uniaxiale  $\sigma_0$ . La géométrie de la coque est représentée sur la Figure 1a, le chargement correspondant à une densité surfacique uniforme d'efforts verticaux  $-f \underline{\underline{e}}_z$ . Seule la moitié de la coque est considérée en appliquant des conditions de symétrie appropriées sur la section médiane  $x = L$ . Le rapport  $h/R = 0.01$  est fixé et on considère différentes valeurs de l'élancement structural  $2L/R$ .

À titre de comparaison, nous avons calculé la charge ultime prédite par un modèle unidimensionnel de poutre en flexion dont le mécanisme de ruine consiste en 3 rotules situées aux encastres et à la mi-portée donnée par  $f_{poutre}^+ = \frac{32}{\pi} \sigma_0 h \left(\frac{R}{2L}\right)^2$ . Nous avons mis en œuvre les approches statiques et cinématiques sur ce problème en considérant des maillages structurés avec 40 éléments le long de la circonférence et des éléments de longueur  $R/4$  dans la direction longitudinale.

Les charges ultimes calculées, adimensionnées par rapport à celle du modèle de poutre en flexion, sont représentées sur la Figure 1b pour différentes valeurs de l'élancement. On constate très clairement une évolution de la charge limite vers une valeur proche du modèle de poutre en flexion pour des valeurs élevées de l'élancement. Pour des valeurs plus modérées, la valeur de la charge ultime est plus faible, l'allure de ces courbes rappelant les résultats obtenus dans le cas des plaques épaisses en interaction flexion-effort tranchant [4].

Ces résultats sont confirmés lorsque l'on représente l'allure des mécanismes de ruines pour différents élancements (Figure 2). On observe un mécanisme de ruine semblable à une rupture par effort tranchant pour les faibles élancements, malgré le fait que la coque est elle-même infiniment résistante à l'effort tranchant. Pour les valeurs plus élevées, on retrouve un mécanisme de ruine de type poutre en flexion pour lequel la déformation est localisée près des encastres et à mi-portée, rappelant les trois rotules du mécanisme 1D.

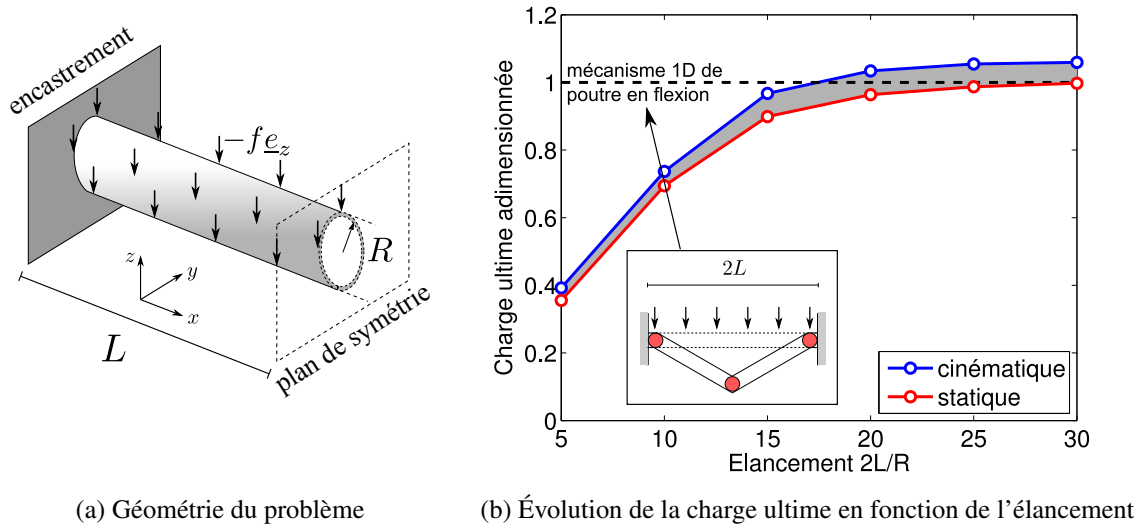


FIGURE 1 – Problème de la coque cylindrique bi-encastree

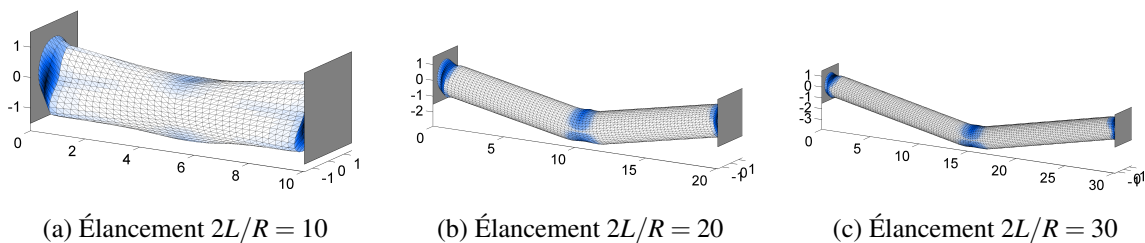


FIGURE 2 – Mécanisme de ruine et densité de déformation pour différents élancements

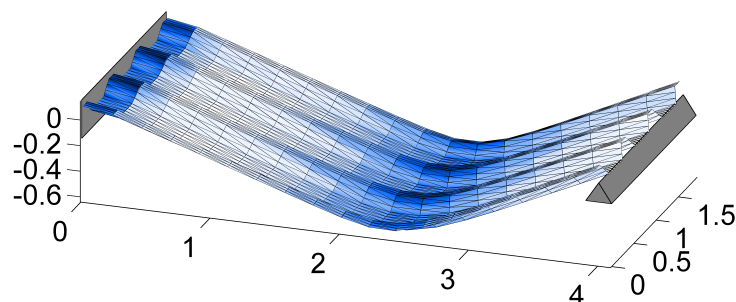


FIGURE 3 – Mécanisme de ruine et densité de déformation pour une tôle ondulée

## 4.2 Tôle ondulée appuyée-encastree

On effectue le même type de calcul sur une tôle ondulée simplement appuyée à une extrémité, encastree à l'autre extrémité, sous chargement vertical uniformément réparti. L'allure du mécanisme de ruine obtenu est en accord avec ce que l'on attend pour ce type de structure (Figure 3).

## Références

- [1] J. Salençon. *Yield Design*, Wiley-ISTE, 2013.
- [2] MOSEK ApS. C/O Symbion Science Park, Copenhagen, Denmark, [www.mosek.com](http://www.mosek.com), 2002
- [3] J. Bleyer, P. de Buhan. *On the performance of non-conforming finite elements for the upper bound limit analysis of thin plates*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Wiley, 94(3), pp 308–330, 2013.
- [4] J. Bleyer, P. de Buhan. *Lower bound static approach for the yield design of thick plates*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Wiley, 100(11), pp.814–8394, 2014.